

# Matematică

Clasa a VII-a

## II

## Algebră

### I. Ecuații și sisteme de ecuații liniare

I.1.	Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități	8
I.2.	Ecuații de forma $ax + b = 0$ , unde $a, b \in \mathbb{R}$ . Mulțimea soluțiilor unei ecuații; ecuații echivalente	11
	Teste de evaluare	17
	Fișă pentru portofoliul individual (A1)	19
I.3.	Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute	21
I.4.	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații liniare	27
	Teste de evaluare	32
	Fișă pentru portofoliul individual (A2)	33
I.5.	Probleme cu caracter aplicativ	35
I.6.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	36

### II. Elemente de organizare a datelor

II.1.	Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Reprezentarea punctelor în plan cu ajutorul sistemului de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte din plan	40
II.2.	Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice. Poligonul frecvențelor	46
	Teste de evaluare	51
	Fișă pentru portofoliul individual (A3)	53
II.3.	Probleme cu caracter aplicativ	55

## Geometrie

### III. Asemănarea triunghiurilor

III.1.	Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante	58
III.2.	Teorema lui Thales	61
	Teste de evaluare	67
	Fișă pentru portofoliul individual (G1)	69
III.3.	Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării	71
III.4.	Criterii de asemănare a triunghiurilor. Aproximarea în practică a distanțelor folosind asemănarea	76

Teste de evaluare	82
Fișă pentru portofoliul individual (G2)	83
III.5. Probleme cu caracter aplicativ	85
III.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	87
<b>IV. Relații metrice în triunghiul dreptunghic</b>	
IV.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii	92
IV.2. Teorema catetei	95
IV.3. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora	97
Teste de evaluare	103
Fișă pentru portofoliul individual (G3)	105
IV.4. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic	107
IV.5. Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Aproximarea în practică a distanțelor folosind relații metrice	113
IV.6. Calculul elementelor în poligoane regulate	116
IV.7. Ariile poligoanelor studiate (opțional)	119
Teste de evaluare	125
Fișă pentru portofoliul individual (G4)	129
IV.8. Probleme cu caracter aplicativ	131
IV.9. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	134
<b>V. Subiecte pentru evaluările finale</b>	
V.1. Variante de subiecte pentru evaluarea sumativă	138
V.2. Variante de subiecte pentru evaluarea finală	142
Soluții	148

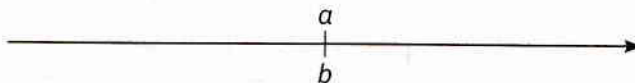
8	<b>I.1</b>	Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități
11	<b>I.2</b>	Ecuții de forma $ax + b = 0$ , unde $a, b \in \mathbb{R}$ . Mulțimea soluțiilor unei ecuații; ecuații echivalente
17		Teste de evaluare
19		Fișă pentru portofoliul individual (A1)
21	<b>I.3</b>	Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute
27	<b>I.4</b>	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații liniare
32		Teste de evaluare
33		Fișă pentru portofoliul individual (A2)
35	<b>I.5</b>	Probleme cu caracter aplicativ
36	<b>I.6</b>	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

**EBRIS**

We know  
books



Numerele reale  $a$  și  $b$  sunt egale dacă se reprezintă în același punct pe axa numerelor.



#### Exemple

1. Dacă  $a = 2$  și  $b = \sqrt{4}$ , atunci  $a = b$ , deoarece  $\sqrt{4} = 2$ .
2. Dacă  $a = \frac{\sqrt{12}}{2}$  și  $b = \sqrt{3}$ , atunci  $a = b$ , deoarece  $\frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ .

#### Proprietățile relației de egalitate pe mulțimea numerelor reale

1. **Reflexivitatea:**  $x = x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
2. **Simetria:** dacă  $x = y$ , atunci  $y = x$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
3. **Tranzitivitatea:** dacă  $x = y$  și  $y = z$ , atunci  $x = z$ , pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

Egalitatea se păstrează dacă adunăm sau scădem din ambii membri ai unei egalități același termen sau dacă înmulțim/împărțim o egalitate printr-un factor nenul. Cu alte cuvinte, au loc următoarele echivalențe, numite **proprietăți de compatibilitate**, între relația de egalitate și operațiile cu numere reale:

$$\begin{aligned} a = b &\Leftrightarrow a + x = b + x, \quad \forall a, b, x \in \mathbb{R}; \\ a = b &\Leftrightarrow a - x = b - x, \quad \forall a, b, x \in \mathbb{R}; \\ a = b &\Leftrightarrow a \cdot x = b \cdot x, \quad \forall a, b, x \in \mathbb{R}, x \neq 0; \\ a = b &\Leftrightarrow a : x = b : x, \quad \forall a, b, x \in \mathbb{R}, x \neq 0. \end{aligned}$$

De asemenea, dacă se adună/se scad/se înmulțesc/se împart două egalități membru cu membru, se obține tot o egalitate. Altfel spus,

$$\text{dacă } \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}, \text{ atunci } \begin{cases} a + c = b + d \\ a - c = b - d \end{cases} \text{ și } \begin{cases} a \cdot c = b \cdot d \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{cases} \quad (c, d \neq 0).$$

**Exemplu.** Dacă  $a, b$  și  $c$  sunt numere reale, astfel încât  $a + 3b = 4$  și  $b - 2c = 1$ , determinați valoarea expresiei  $a + 2b + 2c$ .

**Rezolvare.** Scăzând cele două egalități, obținem egalitatea  $(a + 3b) - (b - 2c) = 4 - 1$ , care este echivalentă cu  $a + 2b + 2c = 3$ .

#### Exersare



- 1 Stabiliți dacă următoarele egalități sunt adevărate sau false:

a  $\sqrt{9} = 3$ ;    b  $\sqrt{16} = 8$ ;    c  $5^2 = 10$ ;    d  $\frac{3}{4} = 0,75$ ;    e  $2,1^2 = 4,41$ .

- 2 Se consideră numerele reale  $a$  și  $b$ , astfel încât  $a + b = 3$ . Înmulțiți ambii membri ai egalității cu 3. Ce egalitate se obține?

3 Se consideră numerele reale  $a$  și  $b$ , astfel încât  $a - b = 1$ . Scrieți egalitățile ce se obțin pornind de la egalitatea dată, dacă se înmulțesc ambii membri ai egalității cu:

a 2;      b 3;      c 7;      d -2;      e -5;      f -10.

4 Se consideră numerele reale  $a$  și  $b$ , astfel încât  $2a + 3b = 7$ . Scrieți egalitățile ce se obțin pornind de la egalitatea dată, dacă se înmulțesc ambii membri ai egalității cu:

a 4;      b -1;      c 2,5;      d -1,2;      e  $\frac{5}{6}$ ;      f  $-\frac{2}{3}$ .

5 Se consideră numerele reale  $a$  și  $b$ , astfel încât  $2a + 2b = 12$ . Determinați:

a  $a + b$ ;      b  $3a + 3b$ ;      c  $11a + 11b$ ;      d  $-a - b$ ;      e  $-4a - 4b$ .

6 Se consideră numerele reale  $a$ ,  $b$  și  $c$ , astfel încât  $a + b = 3$ ,  $b + c = 4$  și  $c + a = 5$ .

a Calculați valoarea expresiei  $a + b + c$ .      b Determinați numerele  $a$ ,  $b$  și  $c$ .

**Indicație:** a Se adună cele trei egalități.

7 Se consideră numerele reale  $a = \sqrt{48}$ ,  $b = 1, (6)$ ,  $c = 2\sqrt{12}$  și  $d = \frac{5}{3}$ .

a Arătați că  $a = c$  și  $b = d$ .

b Fără a efectua calculele, stabiliți dacă următoarea egalitate este adevărată sau falsă:  
 $a + b - 4 = c + d - 4$ .

## Consolidare



8 Se consideră egalitatea  $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ . Scrieți trei egalități echivalente cu această egalitate.

**Indicație:** Se adună sau se înmulțesc ambii membri ai egalității cu același număr real nenul.

9 Se consideră egalitatea  $0, (3)\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{9}}$ . Scrieți trei egalități echivalente cu această egalitate.

10 Precizați ce proprietăți ale egalității s-au aplicat pentru a obține echivalențele:

a  $4(x + 3) = 20 \Leftrightarrow x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 2$ ;

b  $5x - 6 = 7x + 2 \Leftrightarrow -6 = 2x + 2 \Leftrightarrow -8 = 2x \Leftrightarrow -4 = x \Leftrightarrow x = -4$ ;

c  $x(3x - 5) = (\sqrt{3}x - 5)(\sqrt{3}x + 5) \Leftrightarrow 3x^2 - 5x = 3x^2 - 25 \Leftrightarrow -5x = -25 \Leftrightarrow x = 5$ ;

d  $-4x(x + 1) - x(x + 2) = x + 2 \Leftrightarrow -x = x + 2 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$ .

11 Numerele reale  $a$ ,  $b$ ,  $c$  verifică relația  $2a - 1,5b + 0,25c = 3,5$ . Calculați valoarea expresiei

$$E = 4a - 3b + \frac{c}{2}.$$

12 Numerele reale  $a$ ,  $b$ ,  $c$  verifică relația  $\frac{a}{5} - \frac{b}{7} + \frac{c}{11} = 3,14$ . Calculați valoarea expresiei

$$E = 3a - \frac{65}{91} \cdot b + \left(\frac{\sqrt{5c}}{\sqrt{11}}\right)^2 - a : \frac{1}{2}.$$

## Aprofundare



13 Se știe că  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$ . Arătați că  $x + y = 3$ .

14 Se știe că  $(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = 0$ . Calculați  $(a + b)^{100} + b^{100}$ .

15 Se știe că  $(a - 1)^2 + (b - 2)^2 = -(c - 3)^2$ . Arătați că  $(a + b)^3 = c^3$ .

16 Se consideră triunghiul  $ABC$  de laturi  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Arătați că dacă  $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$ , atunci triunghiul este echilateral.

17 Se dau numerele reale  $a, b, c$  astfel încât  $a + 3b = 7$  și  $2b - 5c = 9$ . Determinați:

- a  $a + 5b - 5c$ ;      b  $a + b + 5c$ ;      c  $2a + 6b$ ;  
 d  $3a + 7b + 5c$ ;      e  $2a + 10b - 10c$ ;      f  $2a + 15c$ .

18 Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 3$ , astfel încât  $a + b + 2c = 4$  și  $3a - 2b + c = 7$ . Arătați că:

- a  $4a - b + 3c = 11$ ;      b  $11a - 4b + 7c = 29$ ;      c  $a + c = 3$ ;  
 d  $a - b = 2$ ;      e  $\frac{a + b + 2c}{2a - 3b - c} = \frac{4}{3}$ ;      f  $\frac{5a + 12b + 8c}{17a - 3b + 2c - 12} = \frac{3}{4}$ .

Probleme de șapte stele



19 Fie  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x(x^2 - 2x + 5) = 10$ . Arătați că  $x = 2$ .

20 Fie numerele reale  $x, y$  astfel încât  $x(y^2 + 2) = y(x^2 + 2)$ . Arătați că, dacă  $x \neq y$ , atunci  $xy = 2$ .

21 Fie numerele reale  $a, b, c$ , oricare două diferite între ele. Demonstrați că:

a  $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$ ;

b  $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$ ;

c  $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$ .

O ecuație de forma  $ax + b = 0$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ , se numește *ecuație de gradul I cu o necunoscută*. Numerele reale  $a$  și  $b$  se numesc *coeficienți* ( $a$  este coeficientul necunoscutei, iar  $b$  se numește și termen liber), iar  $x$  se numește *necunoscută* sau *variabilă*.

Se numește *soluție* a ecuației  $ax + b = 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , un număr  $x_0 \in \mathbb{R}$  pentru care propoziția  $ax_0 + b = 0$  este adevărată.

A rezolva o ecuație înseamnă a determina toate soluțiile sale. Aceste soluții formează *mulțimea soluțiilor* ecuației date și se notează, de regulă, cu  $S$ .

Dacă după o ecuație urmează o precizare de forma  $x \in M$ , aceasta indică mulțimea în care ia valori necunoscuta. Se spune că ecuația dată este definită pe mulțimea  $M$  (sau că se rezolvă în mulțimea  $M$ ). Dacă nu se face nicio precizare, se consideră  $M = \mathbb{R}$ .

### Exemple

1. Ecuația  $2x - 6 = 0$  are soluția  $x_0 = 3$ , deoarece  $2 \cdot 3 - 6 = 0$  și  $3 \in \mathbb{R}$ .
2. Ecuația  $3x + 9 = 0$ ,  $x \in \mathbb{N}$ , nu are soluții, deoarece propoziția  $3x_0 + 9 = 0$  este adevărată doar dacă  $x_0 = -3$ , iar  $-3 \notin \mathbb{N}$ . Se observă că ecuația  $3x + 9 = 0$ ,  $x \in \mathbb{Q}$ , are soluția  $x_0 = -3$ .

Pentru a rezolva o ecuație, adică pentru a afla soluțiile sale, putem folosi proprietățile relației de egalitate, obținând egalități echivalente. În general, vom încerca să ajungem la o egalitate de forma  $x = a$ , care este cea mai simplă ecuație și care are doar soluția  $x_0 = a$ .

Două ecuații definite pe aceeași mulțime se numesc *echivalente* dacă au aceleași soluții. În mod evident, două ecuații echivalente au aceeași mulțime a soluțiilor.

Pentru a obține ecuații echivalente cu o ecuație dată, putem aplica următoarele reguli:

- trecem termeni dintr-un membru în celălalt cu semn schimbat;
- adunăm/scădem același număr din ambii membri ai ecuației;
- înmulțim/împărțim ambii membri ai ecuației cu un factor nenul.

Pentru rezolvarea ecuației  $ax + b = 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , se parcurg următorii pași:

- scădem pe  $b$  din ambii membri ai ecuației și obținem  $ax = -b$ ;
- cum  $a \neq 0$ , înmulțim ambii membri cu  $\frac{1}{a}$  și obținem  $x = -\frac{b}{a}$ ;
- întrucât  $-\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$ , soluția ecuației este numărul  $-\frac{b}{a}$  și scriem  $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$ .

**Exemple:** 1.  $2x + 18 = 0 \Leftrightarrow 2x = -18 \mid :2 \Leftrightarrow x = -9 \Rightarrow S = \{-9\}$ .

$$2. \sqrt{3}x - 12 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x = 12 \mid :\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3} \Rightarrow S = \{4\sqrt{3}\}.$$

$$3. (3 - \sqrt{5})x - 4 = 0 \Leftrightarrow (3 - \sqrt{5})x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3 - \sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} \Leftrightarrow x = \frac{4(3 + \sqrt{5})}{4} \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{5} \Leftrightarrow S = \{3 + \sqrt{5}\}.$$



9 Rezolvați ecuațiile, apoi faceți proba soluției găsite:

a  $-6 + 3x = 0$ ;

b  $-3x + 3 = 0$ ;

c  $-9x + 18 = 0$ ;

d  $5x - 20 = 0$ ;

e  $\sqrt{5x} + \sqrt{20} = 0$ ;

f  $\sqrt{3x} - \sqrt{3} = 0$ ;

g  $\sqrt{2x} - \sqrt{18} + 2\sqrt{2} = 0$ ;

h  $(5 - \sqrt{7})x - 5 + \sqrt{7} = 0$ ;

i  $x\sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$ .

10 Rezolvați ecuațiile:

a  $2x - 7 = 13$ ;

b  $-7 + 6x = 4x + 15$ ;

c  $5x - 11 = x - 3$ ;

d  $2,5x - 4,7 = 3(1,5x + 2)$ ;

e  $3x - 5 + 4x = 18$ ;

f  $8x + 20 = 3x$ ;

g  $10(x - 3) = 4(6x + 7) - 2$ ;

h  $(2 + \sqrt{3})x - 2 + \sqrt{3} = 0$ ;

i  $\sqrt{3x} + 4 = 1 - 2\sqrt{3x}$ .

11 Determinați soluțiile ecuațiilor:

a  $7x + 4 + 2(x - 5) = 8(x + 1)$ ;

b  $2(x + 3) - 5(2x + 1) = 12x - 19$ ;

c  $3(2x + 3) + 2(3x + 2) = 9x + 4$ ;

d  $5(x - 2) - 2x + 3(x + 1) = 6 + 7x$ ;

e  $-3x + 5 + 6(-x + 1) = -4(x + 6)$ ;

f  $6(x + 2) - 2(2x + 3) + 4x = 36$ .

12 Stabiliți dacă următoarele ecuații sunt echivalente:

a  $3 - 2x = -7, x \in \mathbb{R}$

și  $11(x - 4) = 3^2 + 2, x \in \mathbb{R}$ ;

b  $6 + 5x = 2(-3 + x), x \in \mathbb{Z}$ ,

și  $x + 18 = 2(-1 - x) + 8, x \in \mathbb{Z}$ ;

c  $7x - 5(x - 1) = 10x - 3, x \in \mathbb{R}$ ,

și  $4x - 3(2 - x) = 4, x \in \mathbb{R}$ ;

d  $13x + 41 = 5(2x + 7) + 3, x \in \mathbb{R}$ ,

și  $9(x - 2) + 14 = -2(3 - 4x) + 1, x \in \mathbb{R}$ .

13 Rezolvați ecuațiile:

a  $3(x + 5) - 6(x - 2) = 4(x + 2) - 5(x - 4) + 1$ ;

b  $2(2x + 7) + 3(x - 1) = 6(x - 3) + 18$ ;

c  $15(x - 1) + 4(2 - 3x) = 11 - 2(x + 4)$ ;

d  $2x + 5 + 3(3x - 1) = 8(1 - 7x) + 2 + 3x$ ;

e  $10(3 - x) + 6(x + 3) = 19 + 7(2x - 1)$ .

## Consolidare



14 Rezolvați ecuațiile:

a  $-13x + 4 = 21 + 4x$ ;

b  $7x - 16 = 16 + 5x$ ;

c  $0,3x - 0,6 = 0,1x + 0,8$ ;

d  $x \cdot \sqrt{(-1)^2} + x \cdot \sqrt{(-2)^2} + x \cdot \sqrt{(-3)^2} = 6$ ;

e  $(4x - 3) \cdot (-3) = 6x + 27$ ;

f  $(1^2 - x) + (2^2 - x) + (3^2 - x) = 50$ ;

g  $5(x - 3) + 11 = 2x + 2$ ;

h  $11(1 - x) + 7x = 15$ ;

i  $6(x + 2) - 8 = 3x + 14$ ;

j  $7x - 9 = 2(3x + 1)$ ;

k  $5(x - 0,4) = 19 - 2x$ ;

l  $23x - 41 = 7(x + 3) + 2$ ;

m  $44 - 13x = 100 - 2(8x - 5)$ ;

n  $3(x - 2) + 2(x - 3) = 4x - 12$ .

15 Determinați  $a \in \mathbb{R}$  pentru care enunțurile de mai jos devin propoziții adevărate:

a Ecuația  $2x + a = 0$  are soluția  $-5$ .

b Ecuația  $-ax + 12 = 0$  are soluția  $1$ .

c Ecuația  $ax + a + 1 = 0$  are soluția  $2$ .

d Ecuația  $3x - a + 2 = 0$  are soluția  $\frac{1}{3}$ .

e Ecuația  $a^2x + 9 = 0$  are soluția  $-1$ .

f Ecuația  $a^2x - 32 = 0$  are soluția  $4$ .

16 Determinați numărul real  $m$  pentru care:

a ecuația  $2x + m = 4x + 3$  are soluția  $-2$ ;

b ecuația  $2mx + 5(x - 1) = 7x + 1 - 3m$  are soluția  $1$ ;

c ecuația  $m(x + 2) + 3(x - 1) = mx - 3$  are soluția  $0$ ;

d ecuația  $2x - m(x + 3) = 7mx + 12$  are soluția  $5$ ;

e ecuația  $-3x + 4(mx - 1) = 6x + 2 - 7(m + 2)$  are soluția  $3$ ;

f ecuația  $3(m - 1)(x + 2) - 2(2m - 1)(2x + 1) = 7x + 3mx - 5$  are soluția  $-3$ .

17 Determinați valorile  $m \in \mathbb{R}$  pentru care ecuațiile următoare sunt echivalente:

- a  $-2-4(3-x)=4-3(x-1)$  și  $m-x(m+1)=1$ ;  
 b  $2(3x-4)-4m=x(m+1)$  și  $x-5(x-1)=x \cdot (-1)^{2011}$ ;  
 c  $3-x=2(x-5m)+m$  și  $2(3x-2m)+3=5(x+1)$ ;  
 d  $x-3(2x-5)=5(x-1)$  și  $m(x-1)=m$ ;  
 e  $mx-1+2(-mx+1)=x-m$  și  $3x+4-2(x-1)=4(x-3)+3(6-x)$ .

18 Rezolvați următoarele ecuații:

- a  $5(3x-2)+3x-6(8x-13)=16(9-2x)-78$ ;  
 b  $2(3x+4)-5(2x-3)-2=7(2x-4)+2(8-5x)+3x$ ;  
 c  $2(3x-4)+5(6x-7)-3x=9(x+10)+11(x+12)+8$ ;  
 d  $3(6x-5)-2(4x+3)+13=-2(-4x+9)+2x-5(3x-2)$ .

19 Determinați soluțiile ecuațiilor:

- a  $6x+3+2(x-4)=7(x+2)$ ;      b  $2(2x+1)-3(3x-5)=4x-19$ ;  
 c  $4(3x-5)+3(4x-7)=10x-13$ ;      d  $5(2x-1)-3x+6(x+2)=15+9x$ ;  
 e  $-2x+4+5(-x+2)=-3(2x-7)$ ;      f  $5(2x+1)-2(3x+2)+3x=13-5x$ .

20 Rezolvați următoarele ecuații:

- a  $5(2x-1)+3(x-1)-6(7x-12)=15(8-x)-84$ ;  
 b  $2(3x+4)-3x-2=6(2x-3)+2(3-4x)+5(2x-3)$ ;  
 c  $4(9x-4)+2(2x-7)-7x=3(3x-10)+5(x-22)-4$ ;  
 d  $2(5x-4)-(3x+2)+11=-3(-5x+10)+3x-6(4x-3)$ .

21 Rezolvați următoarele ecuații:

- a  $\frac{2x-4}{7} = \frac{2-x}{3}$ ;      b  $\frac{2x+5}{3} = \frac{x-5}{4}$ ;      c  $\frac{1}{2} + \frac{2x-5}{4} = x$ ;  
 d  $\frac{7x-5}{3} - \frac{4x+1}{2} = 0$ ;      e  $1 + \frac{3x-2}{4} = \frac{2x+5}{2}$ ;      f  $\frac{5x-7}{8} - \frac{x-1}{4} = \frac{11-x}{2}$ ;  
 g  $\frac{x}{5} - \frac{3-x}{10} = \frac{x+3}{2}$ ;      h  $\frac{4x-6}{12} = \frac{x+1}{4} - \frac{x}{6}$ ;      i  $\frac{2x+3}{7} - \frac{x}{2} = \frac{3x-6}{14}$ .

22 Determinați soluțiile ecuațiilor:

- a  $\frac{x+3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2x+7}{10} = 1$ ;      b  $\frac{11x-4}{4} + \frac{1-x}{2} = 6-x$ ;  
 c  $\frac{x-4}{6} - \frac{x}{5} + \frac{3}{2} = \frac{2x-1}{10}$ ;      d  $\frac{x+2}{3} - \frac{2x+3}{4} + \frac{5}{3} = 1\frac{5}{6} + \frac{7x-11}{12}$ ;  
 e  $\frac{1-x}{3} + \frac{1+3x}{4} = 2x-1$ ;      f  $\frac{7x-12}{5} + \frac{19-6x}{7} = \frac{x}{2} + \frac{x-1}{5}$ .

23 Rezolvați următoarele ecuații:

- a  $\frac{x+3}{4} + \frac{2x+1}{3} = \frac{x-3}{6} + \frac{3x+1}{12}$ ;      b  $\frac{5x-1}{8} - \frac{x+2}{2} + 3 = \frac{3x-7}{4} - \frac{x}{2}$ ;  
 c  $\frac{3x-7}{20} - \frac{1}{10} = \frac{2-x}{5} + \frac{x-3}{4}$ ;      d  $\frac{11}{16} + \frac{x-3}{4} = \frac{3-2x}{8} + \frac{1}{2}$ ;  
 e  $\frac{2}{5}(x-3) + \frac{4x+6}{15} = \frac{2x+7}{10} - 1\frac{1}{30}$ ;      f  $\frac{4x-3}{14} - \frac{2x+3}{7} = \frac{x-1}{2} + \frac{5}{14}$ .

24 Rezolvați ecuațiile:

- a  $\frac{x}{2} + \frac{2x-1}{3} + \frac{3x-2}{4} + \frac{4x-3}{5} = \frac{x}{5} + \frac{2x+1}{4} + \frac{3x+2}{3} + \frac{4x+3}{2}$ ;  
 b  $\frac{2x-3}{4} + \frac{3x+4}{5} + 3 \cdot \frac{x+1}{2} = 2 \cdot \frac{3x+2}{5} + x + \frac{3-7x}{4}$ ;  
 c  $\frac{3x+11}{4} + 2 \cdot \left( \frac{2x-7}{5} + \frac{3x-1}{2} \right) = \frac{9(x+4)}{10} - \frac{2(x+3)}{5} + \frac{5x+1}{10}$ ;

$$d \frac{3x+8}{12} - \frac{2x+3}{15} + \frac{1}{6} = 2 \left( \frac{x+5}{3} - \frac{9+2x}{5} \right) + \frac{1}{5} - \frac{3x+2}{20};$$

$$e \frac{x-5}{2} - \frac{x-4}{3} + \frac{x-3}{4} = \frac{5-x}{4} + \frac{4-x}{3} + \frac{3-x}{2};$$

$$f 1-x + \frac{2-x}{2} + \frac{3-x}{3} = \frac{4+x}{4} + \frac{5+x}{5} + \frac{6-x}{6}.$$

25 Determinați soluțiile ecuațiilor:

$$a x\sqrt{2} + x\sqrt{8} + x\sqrt{32} = \sqrt{4} + \sqrt{16} + \sqrt{64};$$

$$b \sqrt{5}(x+4) + 2\sqrt{5}(x-2) = \sqrt{15};$$

$$c x(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) + 2x(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 6 + \sqrt{3};$$

$$d x\sqrt{2} + 2x(\sqrt{8} - 3) = 20 - 6x;$$

$$e 2x(2 + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 1)(x+2) = 2x+6;$$

$$f 2(x + \sqrt{2} - \sqrt{5}) + 3 = x(\sqrt{5} - \sqrt{2}).$$

## Aprofundare



26 Determinați soluțiile ecuațiilor:

$$a \frac{3x+10}{4} - \frac{7x+5}{2} = 2 \left[ \frac{9x-4}{3} - 3 \left( \frac{x}{2} + \frac{7x-6}{4} \right) \right];$$

$$b \frac{x+1}{2} - \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{2x-5}{3} - \frac{x+3}{9} \right) \right] = \frac{2x-7}{3} - \frac{3x-5}{2};$$

$$c 2 \cdot \left[ 2x - 5 \cdot \left( \frac{3x+1}{4} - \frac{2x+1}{3} \right) \right] = (x+1) \cdot \left( \frac{x+1}{2} - \frac{2x+1}{4} \right);$$

$$d 3 \cdot \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left[ 2 + 3 \cdot \left( 2x - \frac{5x+1}{3} \right) \right] - \frac{x}{2} \right\} = \frac{4x+25}{6};$$

$$e \left[ x - \frac{1}{3} \left( \frac{2x+3}{4} - \frac{3x-2}{5} \right) \right] \frac{1}{2} = \frac{x+5}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{2x-3}{5} + \frac{13-x}{2} \right);$$

$$f 2x - \frac{1}{3} \left( \frac{6x-7}{4} - \frac{5x-2}{3} \right) = \frac{3x}{2} - \left[ \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \right) \right].$$

27 Rezolvați ecuațiile:

$$a 2x(4+2\sqrt{3}) - \sqrt{3}(5x+3\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}(3\sqrt{3}-x) + 2(4x-9);$$

$$b (\sqrt{5}-2\sqrt{3}) \cdot x + 2x(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = \sqrt{125} + 2x\sqrt{5};$$

$$c 2 - \sqrt{3} + 2x(2 - \sqrt{3}) = 4(x - \sqrt{3}) + \sqrt{27};$$

$$d x\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + x(1 + \sqrt{2}) + x(3 + 2\sqrt{2}) = 5(3 + \sqrt{2}) - 2(3 + 2\sqrt{2});$$

$$e \sqrt{5} - 2 + x(\sqrt{5} - 2) = x(2 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5} + 2);$$

$$f \sqrt{3}(\sqrt{2}x+1) + \sqrt{2}(\sqrt{3}x+1) = 2x(\sqrt{6}+1) - (\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

28 Rezolvați ecuațiile:

$$a |x|=1;$$

$$b |x|=8;$$

$$c |-x|=2;$$

$$d |x|=0;$$

$$e |x|=-1;$$

$$f |-x|=-1;$$

$$g |x|=-2;$$

$$h -|x|=-3;$$

$$i -|x|=5.$$

29 Rezolvați ecuațiile:

$$a |x-2|=5;$$

$$b |x+3|=3;$$

$$c |-x+2|=1;$$

$$d |2x+4|=8;$$

$$e |3x-7|=5;$$

$$f |-x+4|=11;$$

$$g |-2x-6|=12;$$

$$h |12-x|=-24;$$

$$i -|5x+10|=-20.$$

30 Rezolvați ecuațiile:

$$a \left| \frac{x-2}{3} \right| = 4;$$

$$b \left| \frac{x+1}{5} \right| = 1;$$

$$c \left| \frac{2x+1}{3} \right| = 5;$$

$$d \left| \frac{x}{2} + 1 \right| = \frac{3}{2};$$

$$e \left| \frac{x}{3} + \frac{1}{4} \right| = 3;$$

$$f \left| \frac{1-x}{3} + 2 \right| = \frac{1}{6};$$

$$g \left| \frac{\sqrt{2}x - \sqrt{8}}{3} \right| = \sqrt{2};$$

$$h \left| \frac{\sqrt{27}x}{3} + \sqrt{12} \right| = 2\sqrt{3};$$

$$i \left| \sqrt{5} + \frac{x}{\sqrt{5}} \right| = \sqrt{45}.$$

31 Rezolvați ecuațiile:

a  $\|x-2|-1|=1$ ; b  $\|x-5|-8|=4$ ; c  $\|2x+3|+1|=5$ ; d  $\|6-x|+2|=4$ ; e  $\|-3x-2|-2|=7$ ;  
 f  $\|6-|x-2||=3$ ; g  $\|2+|2x-3||=4$ ; h  $\|13-|2x+1||=10$ ; i  $\|9-|-2-3x||=1$ .

32 Rezolvați ecuațiile: a  $|x-2|=3$ ; b  $\|x-2|-2|=3$ ; c  $\|x-2|-2|-2|=3$ .

33 Rezolvați ecuațiile:

a  $(x-1)+2(x-2)+3(x-3)+4(x-4)=100$ ; b  $(x-1)+(x-2)+(x-3)+\dots+(x-11)=0$ ;  
 c  $x+2x+3x+\dots+10x=550$ ; d  $(1-x)+(1-2x)+(1-3x)+\dots+(1-10x)=65$ .

34 Rezolvați următoarele ecuații:

a  $1 \cdot x + 2 \cdot x + 3 \cdot x + \dots + 2020 \cdot x = 1010 \cdot 2021$ ;  
 b  $1 \cdot x - 2 \cdot x + 3 \cdot x - \dots - 2020x + 2021x = 2022$ ;  
 c  $x+1 + \frac{x+2}{2} + \frac{x+3}{3} + \dots + \frac{x+2020}{2020} + \frac{x+2021}{2021} = 2021$ ;  
 d  $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \dots + \frac{x}{2019 \cdot 2020} + \frac{x}{2020 \cdot 2021} = 2020$ .

35 Rezolvați ecuațiile:

a  $0,1x + 0,01x + 0,001x + 0,0001x = 2^2 - 0,667$ ;  
 b  $x + 2x + 3x + \dots + 20x = 100x - [(-1)^1 + (-2)^2 + (-3)^3 + (-4)^4]$ ;  
 c  $\frac{x+1}{1 \cdot 3} + \frac{x+1}{3 \cdot 5} + \frac{x+1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{x+1}{2019 \cdot 2021} = \frac{1010}{2021}$ ;  
 d  $\frac{x}{\sqrt{2}+1} + \frac{x}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{x}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}} = 4004$ .

36 Determinați pentru ce valori ale numărului real  $m$  ecuațiile  $2mx+m+2=0$  și  $2mx+2m+1=0$  au aceeași soluție.

37 Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ . Determinați valorile numărului real nenul  $m$  pentru care ecuațiile  $(2a+m)x = bx+m$  și  $(2b+m)x = ax-m$  sunt echivalente.

38 Determinați soluțiile următoarelor ecuații:

a  $\frac{x+a}{a} - \frac{x+b}{b} = 1$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \neq 0$ ; b  $a^2b - \frac{a+x}{b} = ab^2 - \frac{b+x}{a}$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \neq 0$ ;  
 c  $\frac{x+a}{a-b} + \frac{x+a}{a+b} = \frac{x+b}{a-b} + \frac{2(x+b)}{a+b}$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq \pm b$ ;  
 d  $\frac{x-1}{a+b-c} = \frac{x+1}{a-b+c}$ , unde  $a, b, c > 0$  sunt lungimile laturilor unui triunghi.

Probleme de șapte stele



39 Fie  $a, b, c > 0$ . Rezolvați ecuația  $\frac{x-a-b}{ab} + \frac{x-b-c}{bc} + \frac{x-c-a}{ca} = \frac{ab+bc+ca}{abc}$ .

40 Fie  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ . Demonstrați că ecuațiile  $ax+b=0$  și  $cx+d=0$  sunt echivalente dacă și numai dacă  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ .

41 Rezolvați în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația:

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+x} = \frac{400}{201}$$

42 Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$\sqrt{1} + \sqrt{1+3} + \sqrt{1+3+5} + \dots + \sqrt{1+3+5+\dots+(2x+1)} = 201 \cdot 10055$$

## Testul 1

(3p) 1 Rezolvați ecuațiile:

a  $2x + 1 = -5$ ;

b  $0,5x - 1,3 = 2,7$ ;

c  $\sqrt{3}x = 2\sqrt{6}$ .

(2p) 2 Rezolvați ecuația  $2(x+1) - 3(2-x) = x + 3(2x+1)$ .

(1p) 3 Arătați că  $a = -1$  este soluție a ecuației  $3 + 2x - (x - 8) = -3x + 7$ .

(1p) 4 Rezolvați ecuația  $3(2x - 1) + 3(x + 1) - 2(x - 5) = 15(8 - x)$ .

(1p) 5 Determinați valorile numărului real  $m$  pentru care ecuațiile următoare sunt echivalente:

$$-2x + 3(x - 3) + \frac{x - 1}{2} = \frac{x + 1}{3} - \frac{x + 3}{6} \text{ și } mx - 10 + 3x = 2(m - x) + 5.$$

(1p) 6 Rezolvați ecuația  $|3x + 5| = 8$ .

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

## Testul 2

(3p) 1 Rezolvați ecuațiile:

a  $5x - 2 = -7$ ;

b  $4 - 2,3x = -0,6$ ;

c  $\sqrt{2} + 2x = \sqrt{18}$ .

(2p) 2 Rezolvați ecuația  $3(x - 3) - 2(1 - x) = 2x - 2(x + 4) + 7$ .

(1p) 3 Arătați că  $a = -2$  este soluție a ecuației  $(-2x - 1) - 4x + 6 = -2x^2 + 9 - 8x$ .

(1p) 4 Rezolvați ecuația  $\frac{4x - 5}{14} = \frac{3}{14} + \frac{x - 1}{2} + \frac{2x + 3}{7}$ .

(1p) 5 Determinați valorile numărului real  $m$  pentru care ecuațiile următoare sunt echivalente:

$$\frac{2x - 1}{3} + 3x - 4 = \frac{1 - 2x}{4} - \frac{5}{12} \text{ și } 2 + mx - 3x = x(3m - 2) + 4.$$

(1p) 6 Rezolvați ecuația  $\left| \frac{3x + 1}{2} \right| = 10$ .

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.